Le sens des opérations

Ce document a servi de support à une présentation orale de quelques points du nouveau programme de mathématiques de sixième concernant notamment l'écriture fractionnaire. À ce titre, il se présente sous une forme synthétique qu'il conviendra, le cas échéant, de développer.

Sommaire :

ÉTAPE 1 : Donner du sens à « fois de »

- Au cycle 3, les élèves utilisent la fraction $\frac{3}{5}$ dans le sens : « Je partage en cinq parts et je choisis trois de ces parts ».
- En sixième, on peut préciser tout d'abord le sens de l'expression « $\frac{3}{5}$ de 60 » à savoir « trois cinquièmes de la quantité soixante » et en calculer la valeur, par exemple, par la méthode suivante :
  « Je partage la quantité soixante en cinq parts et j'obtiens alors une quantité de douze. Je considère ensuite trois fois cette quantité et j'obtiens finalement 36. »
  (*On peut aussi le formuler en termes de proportionnalité)*

- Ensuite, Il faut passer du sens « partage » de cette expression au sens calculatoire $\frac{3}{5}\times 60$:

  Après avoir défini $\frac{3}{5}$ comme étant le nombre qui, multiplié par 5 donne 3, on peut écrire que : $\frac{3}{5}\times 5 = 3$ puis vérifier que :

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\times 60 &= \frac{3}{5}\times 5\times 12\\ &= 3\times 12\\ &= 36\end{aligned}$$

qui est bien la quantité « trois cinquièmes de soixante ».
(Les données numériques choisies ici permettent ce genre de raisonnement)

ÉTAPE 2 : un nombre peut en cacher un autre

Douze vingtièmes de soixante, c'est douze fois trois donc 36.

D'après les remarques précédentes :

$$\frac{12}{20}\times 60 = 36 .$$

Ce qui signifie que

$$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

Donc $\frac{3}{5}$ peut se présenter sous une autre forme. Mais c'est le même nombre.

ÉTAPE 3 : comment ajouter deux « partages » ?

La notion de partage pourrait amener certains élèves à considérer la somme $\frac{3}{5}+\frac{2}{4}$ comme le partage $\frac{5}{9}$. Il est donc important de définir cette somme comme une somme de deux nombres fractionnaires qu'il sera, par la suite, nécessaire de modifier pour les ajouter (voir à ce sujet le document de A.PRESSIAT « quotient » disponible sur le site académique).

ÉTAPE 4 : quelques exemples où le sens apparaît

Extrait d'un dialogue entendu en classe:

Je sais que 3 divisé par 2 égale 1,5 mais je ne comprends pas pourquoi $\frac{3\pi}{2}=1{,}5\pi$.

Comment l'expliqueriez-vous sans procédure experte ?

On peut en effet écrire que :

$$\frac{3\pi}{2}=\frac{3\times\pi}{2\times 1}=\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{1}=1{,}5\times\pi\ =1{,}5\pi$$

qui est une explication calculatoire mais, en supposant bien acquis le sens précédent, on peut aussi dire que $\frac{3\pi}{2}$ est le nombre qui multiplié par 2 donne 3π c'est-à-dire $1{,}5\pi$.